

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 3

Przestrzenie L^p dla $p \in [1, \infty)$

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie L^p dla $p \in [1, \infty)$

Niech (Ω, Σ, μ) będzie ustaloną przestrzenią z miarą.

Przestrzeń funkcji całkowalnych w p -tej potęgde:

$$L^p(\mu) := \{x : \Omega \rightarrow \mathbb{F} \text{ mierzalna} : \int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu < \infty\}$$

o wartościach w ciele $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z działaniami

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) := \lambda x(t)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{działania} \\ \text{określone} \\ \text{punktowo!} \end{array} \right)$

gdzie $x, y \in L^p(\mu)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.



Na przestrzeni $L^p(\mu)$ określona jest tzw. **p -ta norma**

$$\|x\|_p := \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Uwaga: $\|x\|_p = 0 \iff \mu(\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}) = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} x \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} 0$

Twierdzenie (Nierówność Höldera)

Dla $1 < p, q < \infty$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $x \in L^p(\mu)$ i $y \in L^q(\mu)$

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

czyli

$$\int_{\Omega} |xy| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |y|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$



Hölder

Równość zachodzi $\iff |x|^p$ i $|y|^q$ są liniowo zależne μ -pw

(tzn. $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$ μ -pw dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nierównych zero jednocześnie)

Dowód: Jeśli $\|x\|_p = 0$, to $x = 0$ μ -pw, skąd $x \cdot y = 0$ μ -pw i zachodzi trywialnie. Podobnie, gdy $\|y\|_q = 0$. Załóżmy zatem, $\|x\|_p \neq 0$ i $\|y\|_q \neq 0$. Zastosujemy **nierówność Younga**, która mówi, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ mamy

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

a która wynika z **własności logarytmu**:

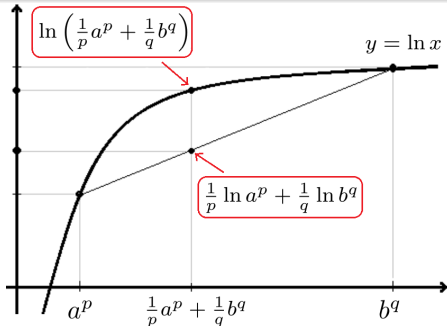
logarytm!



Young

$$\begin{aligned}\ln(ab) &= \ln a + \ln b \\ &= \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \\ &\leq \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right),\end{aligned}$$

nierówność wynika z **wklęsłości logarytmu**. Zdejmując $\ln$ otrzymujemy **nierówność Younga**. Równość zachodzi $\iff a^p = b^q$



Podstawiając $a = \frac{|x(t)|}{\|x\|_p}$ i $b = \frac{|y(t)|}{\|y\|_q}$ do $a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ mamy

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}, \quad \text{dla każdego } t \in \Omega.$$

Całkując powyższą nierówność obustronnie

$$\frac{\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_{\Omega} |y(t)|^q d\mu}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mnożąc obustronnie przez $\|x\|_p \|y\|_q$ dostajemy $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$.

Przy czym, $\|x \cdot y\|_1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q \iff \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}$ μ -pw. Czyli

$$\|x \cdot y\|_1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q \iff \|y\|_q^q \cdot |x|^p = \|x\|_p^p \cdot |y|^q \text{ } \mu\text{-pw}$$

$$\iff |x|^p \text{ i } |y|^q \text{ s\aa liniowo zale\znych } \mu\text{-pw}$$

„ $\Leftarrow$ ” Je\slsi $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$ μ -pw, to ca\lkuj\ac mamy $\alpha\|x\|_p^p = \beta\|y\|_q^q$, sk\ad je\slsi $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, to $\|y\|_q^q \cdot |x|^p = \|x\|_p^p \cdot |y|^q$ μ -pw. ■

Twierdzenie (Nier\wno\sc Minkowskiego)

Dla dowolnego $p \geq 1$ oraz $x, y \in L^p(\mu)$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$



Minkowski

Dow\od: Dla $p = 1$ dow\od jest \latwy:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \int_{\Omega} |x + y| \, d\mu \stackrel{\text{N. Tr\ojk\ata}}{\leq} \int_{\Omega} |x| + |y| \, d\mu = \int_{\Omega} |x| \, d\mu + \int_{\Omega} |y| \, d\mu \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{aligned}$$

Za\l\ozmy, \ze $p > 1$. Wtedy istnieje $q > 1$ takie, \ze $1/p + 1/q = 1$:

$$q := p/(p - 1).$$

Zastosowujemy nier\wno\sc H\oldera!

$$\|x + y\|_p^p = \int_{\Omega} |x + y|^p d\mu = \int_{\Omega} |x + y| \cdot |x + y|^{p-1} d\mu$$

N. Trójkąta

$$\leq \int_{\Omega} |x| \cdot |x + y|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |y| \cdot |x + y|^{p-1} d\mu$$

N. Höldera x2

$$\leq \|x\|_p \cdot \left(\int_{\Omega} |x + y|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$



$$+ \|y\|_p \cdot \left(\int_{\Omega} |x + y|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$



$$\stackrel{q(p-1)=p}{=} \|x\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p/q}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x + y\|_p^{p/q}.$$

Dzieląc obie strony przez $\|x + y\|_p^{p/q}$ i stąd, że $p - p/q = 1$ mamy

$$\|x + y\|_p = \|x + y\|_p^{p-p/q} = \frac{\|x + y\|_p^p}{\|x + y\|_p^{p/q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \quad \blacksquare$$

Konwencja:

W przestrzeni $L^p(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe μ -pw
 (formalnie elementami $L^p(\mu)$ są klasy abstrakcji relacji $y \stackrel{\mu\text{-pw}}{=} x$).
 Zatem $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią unormowaną!

Tw. $L^p(\mu)$ jest przestrzenią Banacha dla każdego $p \in [1, \infty)$.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L^p(\mu)$ ciąg Cauchy. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\|x_n - x_m\|_p \leq \frac{1}{4^n}$ dla $m \geq n$.



Pokażemy, że zbiór

$$A := \{t \in \Omega : \forall_N \exists_{n > N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| \geq 1/2^n\}$$

ma miarę zero oraz ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ jest zbieżny punktowo na $\Omega \setminus A$.

Zapiszmy $A = \bigcap_{N=1}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty A_n$, gdzie $A_n := \{t : |x_n(t) - x_{n+1}(t)| \geq \frac{1}{2^n}\}$.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2^{np}} \mu(A_n) \leq \int_{A_n} \underbrace{|x_n - x_{n+1}|^p}_{\geq (1/2^n)^p} d\mu \leq \|x_n - x_{n+1}\|_p^p \leq \frac{1}{4^{np}},$$

skąd $\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^{np}}$. Zatem

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=N}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=N}^\infty \mu(A_n) \leq \sum_{n=N}^\infty \frac{1}{2^{np}} \longrightarrow 0, \quad \text{przy } N \rightarrow \infty$$

jako ogon szeregu zbieżnego

Czyli $\mu(A) = 0$. Zauważmy dalej, że

$$t \in \Omega \setminus A \iff \exists_N \forall_{n \geq N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| < \frac{1}{2^n}$$

$$\implies \exists_N \forall_{m \geq n \geq N} |x_n(t) - x_m(t)| < \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem dla $t \in \Omega \setminus A$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy, a więc jest zbieżny. Połóżmy $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$, gdy $t \in \Omega \setminus A$, oraz $x(t) = 0$, gdy $t \in A$. Wtedy $x_n \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x$.



DEMOTYWATORY.PL

Twój kandydat w wyborach

$$t \in \Omega \setminus A \iff \exists_N \forall_{n \geq N} |x_n(t) - x_{n+1}(t)| < \frac{1}{2^n}$$

$$\implies \exists_N \forall_{m \geq n \geq N} |x_n(t) - x_m(t)| < \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem dla $t \in \Omega \setminus A$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy, a więc jest zbieżny. Połóżmy $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$, gdy $t \in \Omega \setminus A$, oraz $x(t) = 0$, gdy $t \in A$. Wtedy $x_n \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x$. Sprawdzamy zbieżność w normie:

$$\|x - x_n\|_p^p = \int_{\Omega} |x(t) - x_n(t)|^p d\mu = \int_{\Omega \setminus A} \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m(t) - x_n(t)|^p d\mu$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |x_m - x_n|^p d\mu \leq \sup_{m \geq n} \|x_n - x_m\|_p^p \leq (1/4)^{pn} \longrightarrow 0.$$

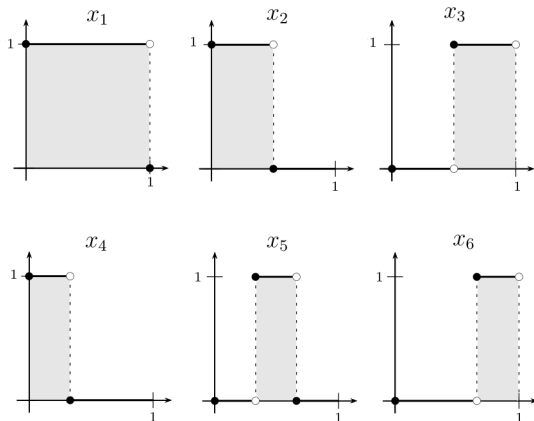
Czyli $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x$. Skoro $\|x\|_p \leq \|x - x_n\|_p + \|x_n\|_p < \infty$, to $x \in L^p(\mu)$. ■

Uwaga. Z dowodu wynika, że

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x \implies \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} x_{n_k} \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x.$$

Natomiast na ogół $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x \not\Rightarrow x_n \xrightarrow{\mu\text{-pw}} x$.

Prz. (Wędrujący garb) Na przestrzeni $L^p[0, 1] = L^p(\lambda)$, gdzie λ miara Lebesgue'a na odcinku $[0, 1]$ ustawmy ciągi k -elementowe $x_i^{(k)} = \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]}$, $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, w jeden ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty$:



$$x_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}, \quad x_2 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]},$$

$$x_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}, \quad x_4 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3}]},$$

$$x_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}, \quad x_6 = \mathbb{1}_{[\frac{2}{3}, 1]}$$

$$x_7 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]}, \quad x_8 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}$$

$$x_9 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}, \quad x_{10} = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}$$

...

Wtedy $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$, bo $\|x_i^{(k)}\|_p = \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = (1/k)^{1/p} \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$. Ale dla każdego $t \in [0, 1)$ ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ jest rozbieżny, bo ma dwa punkty skupienia 0 i 1. Czyli $x_n \not\xrightarrow{\mu\text{-}pw} 0$.

***Całka względem miary liczącej, to suma!
Ciągi to funkcje na zbiorze $\mathbb{N}$ lub $\{1, \dots, n\}$!***

Prz. Jeśli $\Omega = \mathbb{N}$ i μ jest miarą liczącą, to $L^p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, jest przestrzenią ciągów sumowalnych w p -tej potęgę:

$$\ell^p := \left\{ x = (x(1), \dots, x(n), \dots) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

z działaniami po współrzędnych i normą

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

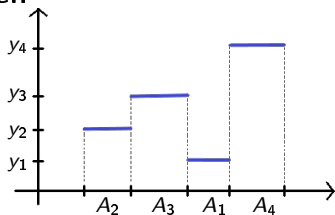
Prz. Jeśli $\Omega = \{1, \dots, n\}$ i μ miara licząca, to $L^p(\mu) \cong \mathbb{F}^n$ jest n -wymiarową przestrzenią Banacha z normą

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Funkcje charakterystyczne zbiorów o mierze skończonej rozpinają przestrzeń całkowalnych funkcji prostych

$$\mathcal{E}(\mu) := \text{span}\{\mathbb{1}_{A_k} : A_k \in \Sigma, \mu(A_k) < \infty\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^n y_k \mathbb{1}_{A_k} : y_k \in \mathbb{F}, \mu(A_k) < \infty \right\}$$



Stw. Dla $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{E}(\mu)$ jest gęstą podprzestrznią $L^p(\mu)$.

Zatem $L^p(\mu) = \overline{\mathcal{E}(\mu)}^{\|\cdot\|_p}$ jest uzupełnieniem $\mathcal{E}(\mu)$ w normie

$$\|x\|_p := \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dowód: Dla $x \in L^p(\mu)$ istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mu)$ takie, że $x_n \rightarrow x$ punktowo oraz $|x_n| \leq |x|$. Skoro $|x - x_n|^p \leq 2|x|^p \in L^1(\mu)$

$$\|x - x_n\|_p^p = \int_{\Omega} |x(t) - x_n(t)|^p d\mu \xrightarrow{\text{zbieżność zmajoryzowana}} 0. \quad \blacksquare$$

Dotychczas poznane przestrzenie Banacha (ściągałka)

Ozn.	przestrzeń Banacha	norma
$C_b(\Omega)$	funkcje ciągłe i ograniczone	$\ x\ _\infty = \sup_{t \in \Omega} x(t) $
$C_0(\Omega)$	funkcje ciągłe, znikające w nieskończoności	$\ x\ _\infty = \max_{t \in \Omega} x(t) $
$L^p(\mu)$	„funkcje” całkowalne w p -tej potęgde	$\ x\ _p = \left(\int_{\Omega} x(t) ^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$
ℓ^∞	ciągi ograniczone	$\ x\ _\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} x(k) $
ℓ^p	ciągi sumowalne w p -tej potęgde	$\ x\ _p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x(k) ^p \right)^{\frac{1}{p}}$
c	ciągi zbieżne	$\ x\ _\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} x(k) $
c_0	ciągi zbieżne do zera	$\ x\ _\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} x(k) $

Dla $1 \leq p < q < \infty$ mamy

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty \quad (\ell^p = \overline{c_0}^{\|\cdot\|_p})$$

Natomiast jeśli $\mu(\Omega) < \infty$ (miara skończona), to

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu) \quad (L^p(\mu) = \overline{\mathcal{E}(\mu)}^{\|\cdot\|_p})$$

